

Espace Vectoriel

Antoine Ragot Raillat

Fevrier 2025

Table des matières

1	Espace Vectoriel	2
1.1	Définition	2
2	Sous espace vectoriel	3
2.1	Définition	3
2.2	Caractérisation d'un sous espace vectoriel	3
2.3	Proposition	3
3	Générateurs bases et dimension	4
3.1	Sous espace vectoriel engendré	4
3.2	Famille de vecteur	4
3.2.1	Famille libre et lié	4
3.2.2	Famille génératrice	4
3.3	Base	4
3.3.1	Base Orthonormée de $\mathbb{R}^n$	5
4	Somme et somme directe	6
4.1	Somme	6
4.2	Somme direct	6

1 Espace Vectoriel

1.1 Définition

Un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est un ensemble d'éléments, appelés vecteurs muni d'une loi d'addition "+" et une loi de multiplication par un scalaire "." satisfaisant les propriétés suivantes :

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in E$;
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ pour tout $\vec{w}, \vec{v}, \vec{u} \in E$;
- Il existe un vecteur $\vec{0}$ tel que $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$ pour chaque $\vec{v} \in E$;
- Pour chaque vecteur $\vec{u}$ il existe un vecteur $\vec{u}'$ tel que $\vec{u} + \vec{u}' = \vec{0}$. On note $\vec{u}' = -\vec{u}$;
- $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ pour chaque $\vec{v} \in E$;
- $(\lambda + \mu) \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = \lambda \vec{v} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} + \mu \vec{u}$;
- $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{v}$;

2 Sous espace vectoriel

2.1 Définition

Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, un sous-ensemble $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel si F muni des lois d'addition et de multiplication est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

2.2 Caractérisation d'un sous espace vectoriel

$F \subset E$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si :

- $\vec{0} \in F$;
- pour chaque $\vec{v}, \vec{w} \in F$ on a $\vec{v} + \vec{w} \in F$;
- pour chaque $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\vec{v} \in F$, on a $\lambda \cdot \vec{v} \in F$;

2.3 Proposition

- L'intersection d'un ensemble de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel ;
- la réunion de deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 est un sous-espace vectoriel si et seulement si $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$;

3 Générateurs bases et dimension

3.1 Sous espace vectoriel engendré

Si E est un espace vectoriel et S est un sous ensemble de E , On appelle $Vect(S)$ le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant S . On dit que S engendre $Vect(S)$.

$$Vect(v_1, v_2, \dots, v_n) = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$$

où $\mathbb{K}$ est le corps des scalaires (souvent $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$: Soient $v_1 = (1, 0)$ et $v_2 = (0, 1)$. Toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs sont de la forme $\lambda_1(1, 0) + \lambda_2(0, 1) = (\lambda_1, \lambda_2)$. Donc $Vect(v_1, v_2) = \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire tout le plan.

3.2 Famille de vecteur

3.2.1 Famille libre et lié

Une famille $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ de E est une **famille libre ou linéairement indépendante** si toute combinaison linéaire égale au vecteur nul $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p = 0$ est telle que tous ses coefficients sont nuls, c'est-à-dire $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_p = 0$. **Une famille libre est une famille qui n'est pas lié.**

3.2.2 Famille génératrice

On dit qu'une famille $F = (e_i)_{i \in I}$ est génératrice dans E si $Vect(F) = E$. Autrement dit, une famille F est génératrice dans E si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des e_i . C'est à dire :

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in K^n, x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k.$$

3.3 Base

Définition : Si $E = Vect\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ et si $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ sont linéairement indépendants, on dit que le système de vecteurs (ordonnés) $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ est une base de E .

Autrement dit une base de E est une famille qui est à la fois libre et génératrice de E .

Caractérisation des bases : Soit E un espace vectoriel, $B = (x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteur de E . B est une base de E si et seulement si tout vecteur x de E s'écrit, de manière unique, comme combinaison linéaire des $(x_i)_{i \in I}$.

Exemple : $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Cette base est appelée la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Propriété d'une base :

- Chaque espace vectoriel a une base
- Le nombre d'éléments d'une base est indépendant de la base choisie. Ce nombre est la dimension de l'espace vectoriel ($\dim(E)$).
- Si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel, alors $\dim(F) \leq \dim(E)$. En plus, si E est de génération finie, alors $\dim(F) = \dim(E)$ si et seulement si $F = E$;
- $\dim(E) = n$ et $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ est un sous-ensemble de n éléments, alors, B est une famille génératrice si et seulement si l'ensemble est linéairement indépendant. Dans ce cas, il forme une base.

Théorème (théorème de la base incomplète) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel engendré par un ensemble fini G , et soit $L \subset E$ un ensemble de vecteurs linéairement indépendants. Alors il existe un sous ensemble S de G tel que $L \cup S$ forme une base de E .

Corollaire (Théorème d'extraction d'une base) Soit E un espace vectoriel engendré par un ensemble fini G . Alors il existe un sous ensemble S de G qui forme une base.

Théorème Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel engendré par un ensemble S de cardinal n . Si $M \subset E$ est de cardinal $\geq n + 1$, alors M est lié.

Corollaire Soit E un espace vectoriel engendré par un ensemble fini. Soit L un ensemble de vecteurs linéairement indépendants de E , et soit G une famille génératrice de E . Alors $\text{Card}(L) \leq \text{Card}(G)$.

3.3.1 Base Orthonormée de $\mathbb{R}^n$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni d'un produit scalaire : si

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ et } \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \text{ alors le produit scalaire } \vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^n v_i w_i.$$

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si le produit scalaire est 0. La longueur du vecteur $\vec{v}$ est $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$

4 Somme et somme directe

4.1 Somme

Si E est un espace vectoriel et F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels, alors la **somme**, notée $F_1 + F_2$, est le plus petit sous-espace vectoriel contenant F_1 et F_2 . On a

$$F_1 + F_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in F_1 \text{ et } v_2 \in F_2\}$$

Remarque : Si $F_1 = Vect(S_1)$ et $F_2 = Vect(S_2)$, alors $F_1 + F_2 = Vect(S_1 \cup S_2)$. En particulier, $F_1 + F_2$ est le plus petit sous espace vectoriel de E qui contient $F_1 \cup F_2$.

4.2 Somme direct

On dit que F_1 et F_2 sont en somme direct dans E si

- $F_1 \cap F_2 = \{0\}$;
- $F_1 + F_2 = E$

Si F_1 et F_2 sont en somme directe dans E , on dit que F_2 est un sous-espace vectoriel supplémentaire à F_1 dans E .

Notation : Si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, alors on note la somme directe par $F_1 \oplus F_2$.

Proposition Chaque sous-espace vectoriel possède un sous-espace vectoriel supplémentaire. De plus, si $E = F \oplus G$, alors $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Remarque : Un sous-espace supplémentaire n'est pas unique, mais sa dimension ($\dim(E) - \dim(F)$) est déterminée par la dimension de E et la dimension de F .

Théorème : Soit E un espace vectoriel de dimension $< \infty$. Soient F_1 et F_2 deux sous-espace vectoriel. Alors

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2)$$